

Vorspann zu Vorlesung 13

175

SATZ 16.5: $\mathbb{R}^n$ ist vollständig bzgl. irgendeiner Norm $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Beschränkte Folgen, d.h. $\sup_k \|x_k\|_p < \infty$ für ein

(und damit für alle) p , haben konvergente Teilfolgen.

Beweis: Komponentenweise Argumentation, Vollständigkeit von $\mathbb{R}$,
Bolzano-W.

Details $\rightarrow$ Übung

Die Seiten 175^{a-e}
sind auf p. 175 oben
"zu ergänzen" ! $\square$

DEF 16.8: Sei (X, d) metrischer Raum.

(i) $\text{diam } A = \sup \{ d(x, y) : x, y \in A \}$ Durchmesser von A

(ii) A beschränkt $\Leftrightarrow \text{diam } A < \infty$

Bem: 1) $\text{diam } B_r(a) = 2r$

2) A beschränkt $\Leftrightarrow \exists R > 0: A \subset B_R(a)$
 $a \in X$

$\square$

Der folgende Satz verallgemeinert das Intervallschachtelungsprinzip auf

vollständige metrische Räume.SATZ 16.6: Cantor'scher Durchschnittssatz

Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum, $\{A_k\}$ eine Folge von Mengen mit

$$(i) \quad A_k \supset A_{k+1}, \quad A_k \neq \emptyset, \quad A_k \text{ abgeschlossen}$$

$$(ii) \quad \text{diam } A_k \rightarrow 0 \quad \text{bei } k \rightarrow \infty.$$

Dann gibt es genau einen Punkt x , der in allen A_k liegt, d.h.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{x\}.$$

Beweis: Für jedes n wähle $x_n \in A_n$. $m \geq n \Rightarrow x_m \in A_n$

und daher $d(x_n, x_m) \leq \text{diam } A_n$, also $\{x_n\}$ Cauchy-Folge.

Sei $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Da A_k abgeschlossen ist und $x_n \in A_k$, $n \geq k$,

folgt die Beh. $\square$

DEF 16.8 : Sei X ein Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|, \|\cdot\|_*$

auf X heißen äquivalent : $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0: \alpha \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_* \leq \beta \|\cdot\|$.

Bem: 1) $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum $\Leftrightarrow (X, \|\cdot\|_*)$ Banachraum.

2) Alle Normen $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

SATZ 16.7: Je zwei beliebige Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent, d.h. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

ist B-Raum bzgl. jede Norm.

Beweis: Sei $\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^n$. $e_1, \dots, e_n$ = Standardbasis,

also $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, Es folgt

$$\|x\| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|e_i\| \leq \max_{i=1}^n |x_i| \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \|e_i\|}_{=: \beta},$$

so daß $\|x\| \leq \beta \cdot \|x\|_\infty$.

Annahme: $\nexists \alpha > 0 \exists x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| > \alpha \|x\|_\infty$.

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \exists x_k$ mit $\|x_k\|_\infty > k \cdot \|x_k\|$

Sei $y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty} \Rightarrow \|y_k\|_\infty = 1$ und

$$\|y_k\| < \frac{1}{k}$$

o.E. (Bolzano-W. für y_k und $\|\cdot\|_\infty$, vgl. 16.5) gilt

$$\|y_k - y\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für ein } y \in \mathbb{R}^n, \quad \|y\|_\infty = 1$$

(hier geht die umgekehrte Dreiecksungl. $|\|y\|_\infty - \|y_k\|_\infty| \leq \|y_k - y\|_\infty$ ein)

Es folgt: (gemäß $\|\cdot\| \leq \beta \|\cdot\|_\infty$)

$$\|y\| \leq \|y - y_k\| + \|y_k\| \leq \beta \|y - y_k\|_\infty + \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{also } \|y\| = 0 \iff y = 0.$$

$y = 0$ widerspricht $\|y\|_\infty = 1$, * ist falsch, d.h.

$$\exists \alpha > 0 \text{ mit } \|\cdot\|_\infty \leq \alpha \|\cdot\|.$$

□

Übung: zeige mit 16.7, daß im Falle $\dim X < \infty$ alle Normen äquivalent sind.

Bem: $\dim X = \infty \Rightarrow$ zwei Normen sind i.a. nicht äquivalent

$$X = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\},$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{[0,1]} |f|,$$

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx$$

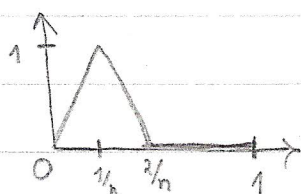
Da glm. Limiten stetiger Funktionen stetig sind, folgt:

$(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist B-Raum^{*}

$(X, \|\cdot\|_1)$ ist dagegen nicht vollständig $\Rightarrow$

$\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ können nicht äquivalent sein!

Dies sieht man auch am folgenden Beispiel:



$f_n \in X$ mit $\|f_n\|_\infty = 1$,

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$\rightarrow$ Übung: zeige * ; Hinweis: $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist B-Raum.

Kompaktheit in metrischen Räumen

DEF 16.9: Sei (X, d) metrischer Raum, $A \subset X$.

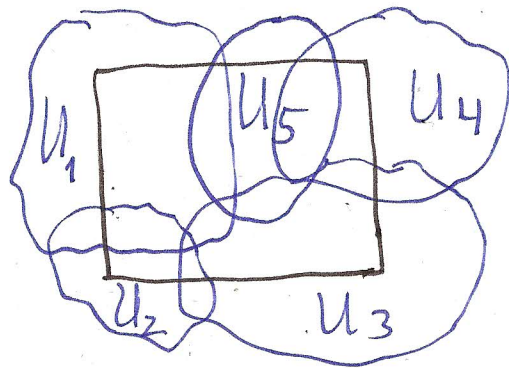
(i) Ein System $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ heißt offene Überdeckung von A ,

falls $U_\alpha \subset X$ offen ist mit $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

(iii) X Kompakter metrischer Raum - 779-

: $\Leftrightarrow X$ kompakte Menge im Sinne von (ii)

Bild zu (ii):



Beispiele (später mehr mit "Kriterien für Kompaktheit")

① Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Konvergente Folge
in X , d.h. $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert.

Beh: $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ Kompakt

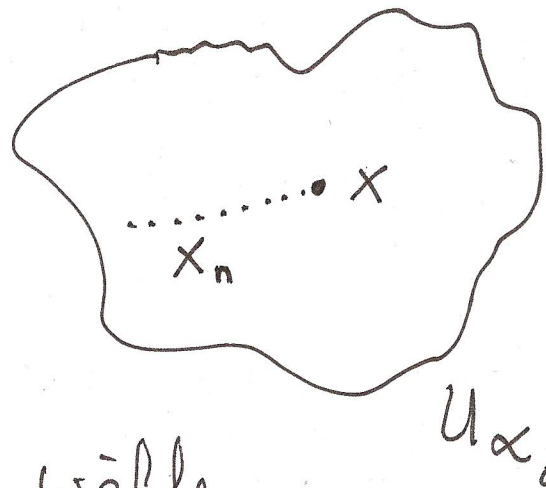
Bew: Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ offene Überdeckung
von $A \implies \exists \alpha_0 \in I$ mit

$$x \in U_{\alpha_0}$$

-180-

Konvergenz impliziert:

$$x_n \in U_{\alpha_0} \quad \forall n \geq N$$



mit N passend; nun wähle

$$U_{\alpha_i} \text{ mit } x_i \in U_{\alpha_i} \text{ für } i = 1, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow A \subset U_{\alpha_0} \cup U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_{N-1}}$$

□

$$(2) \quad X = \mathbb{R} \text{ mit } d(x, y) := |x - y|;$$

$$A := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Beh: A nicht kompakt

Beweis: Sei für $n \in \mathbb{N}$ $U_n := \left(\frac{1}{n+1}, \infty \right)$

$$\Rightarrow U_n \text{ offen und } \frac{1}{n} \in U_n \quad \forall n$$

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n,$$

d.h. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist offene Überdeckung.

Annahme: A kompakt

$$\Rightarrow \exists n_1, \dots, n_\ell \text{ mit } A \subset U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_\ell}$$

$$\text{o. E. : } n_1 < n_2 < \dots < n_\ell$$

$$\text{Gemäß } U_{n_i} \subset U_{n_\ell}, \quad i = 1, \dots, \ell,$$

$$\text{folgt: } A \subset U_{n_\ell} = \left(\frac{1}{n_\ell + 1}, \infty \right),$$

Widerspruch!

Merke: Das Anwenden der Def. ist
umständlich!

Der nächste Satz gibt zumindest
eine Entscheidungshilfe:

-182-

Satz 16.8: Sei (X, d) metrischer Raum
und $A \subset X$. Dann gilt:

$$A \text{ kompakt} \implies \begin{cases} A \text{ beschränkt} \\ \text{und} \\ A \text{ abgeschlossen} \end{cases}$$

Bem: In Bspl. ② ist A nicht abge-
schlossen $\implies$ A nicht kompakt
16.8

Beweis: Sei $x \in X$ beliebig $\implies$

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \implies$$

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(x) \implies A \text{ kompakt}$$

$$\exists n_1, \dots, n_\ell \in \mathbb{N} \text{ mit } A \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} B_{n_i}(x) \quad -183-$$

Mit $N := \max \{n_1, \dots, n_\ell\}$ folgt:

$$\boxed{A \subset B_N(x)},$$

also A beschränkt.

Zu zeigen: A abgeschlossen $\iff \boxed{X-A \text{ offen}}$

O.E. $X-A \neq \emptyset$; wähle $x \in X-A$
und setze $(n \in \mathbb{N})$

$$U_n := \{z \in X : d(z, x) > \frac{1}{n}\}$$

$$\implies U_n \text{ offen und } \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X - \{x\}$$

$$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \supset A, \text{ da } X - \{x\} \supset A$$

$$A \text{ kompakt} \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit}$$

$$A \subset \bigcup_{n=1}^N U_n = U_N$$

andernseits:

$$B_{1/N}(x) \subset \overline{B_{1/N}(x)} = X - U_N \subset X - A$$

Also liegt die offene Kugel $B_{1/N}(x)$ in $X - A$

$\xRightarrow{x \text{ beliebig}}$ $X - A$ offen

□

Bem: " $\Leftarrow$ " gilt leider i. a. nicht
in Satz 16.8, allerdings in wichtigen
Spezialfällen (s.u.).

Dagegen hat man ein weiteres Kriterium:

Satz 16.9

Sei A kompakteMenge im metrischen Raum (X, d) .Dann gilt: Ist B abgeschlossen
und $B \subset A$, so ist auch B kompakt.Beweis: Sei $B \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ mit U_α offen.

Es ist dann

$$(X - B) \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X,$$

speziell:

$$\underbrace{(X - B)}_{\text{offen!}} \cup \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A \xrightarrow[\text{kompakt}]{A}$$

$$A \subset (X - B) \cup U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \implies$$

$$B \subset \dots - // - \dots \implies$$

$$B \subset U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} \quad \square$$

In $\mathbb{R}^n$ gilt nun doch die Umkehrung
von Satz 16.8, präzise:

Satz 16.10 (von Heine und Borel)



Für Teilmengen A des $\mathbb{R}^n$ gilt:

A kompakt $\iff$
 A beschränkt u. abgeschlossen

Hierbei ist $\mathbb{R}^n$ irgendwie normiert.

Also:

$$\overline{B_r(x)}, \quad \left\{ z \in \mathbb{R}^n : a_i \leq z_i \leq b_i \right. \\ \left. \text{für } i = 1, \dots, n \right\}$$

sind kompakt, auch die Ränder davon

(das wäre mit der Def. umständlich
zu prüfen !)

Heine - Borel folgt aus der tiefen Aussage

Satz 16.11 : In metrischen Räumen (X, d)
gilt für Teilmengen A :

A (überdeckungs) kompakt $\iff$

A folgenkompakt, d.h. jede
Folge (x_n) aus A hat eine in
 A konvergente Teilfolge.

Bem : 1.) " folgenkompakt " war unsere Def.
von Kompakt hier in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$!

2.) " Folgenkompakt hier " ist das passende
Konzept in metrischen Räumen, in
normierten Räumen X mit $\dim X < \infty$

-188-

(also $\mathbb{R}^n$) kann man gemäß Heine-Borel mit „beschränkt u. abgeschlossen“ argumentieren, in ganz allgemeinen topologischen Räumen hat man nur noch Überdeckungskompaktheit.

Beweis von 16.10 mit 16.11:

„ $\implies$ “ ist Satz 16.8 und gilt ja in allg. metrischen Räumen.

„ $\Leftarrow$ “ Sei A beschränkt und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Gemäß 16.11

müssen wir Folgenkompaktheit prüfen:

Sei (x_n) Folge in A . Nach Satz 16.5

hat (x_n) eine Teilfolge $(\tilde{x}_n)$,
 die bzgl. jeder p -Norm und damit
 gemäß Satz 16.7 bzgl. jeder Norm
 auf $\mathbb{R}^n$ konvergiert. Da A abgeschlossen
 ist, gehört der Limes nach Satz 16.4
 auch zur Menge A . $\square$

Beweis von Satz 16.11 $\longrightarrow$ Skript

Stetigkeit von Funktionen auf / zwischen metrischen Räumen

(Übertragung der Konzepte aus Analysis I)

Def. 16.11 (Folgenstetigkeit)

Seien X, Y metrische Räume.

(i) $f: X \rightarrow Y$ heißt stetig in

$$\underline{a \in X} : \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$$

für jede Folge (x_n) in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Achtung: Die Begriffsbildung bezieht sich auf fixierte Metriken in X und Y !

(ii) f heißt stetig auf X : $\iff$
 f stetig an jeder Stelle $a \in X$.

Satz 16.12 : (äquivalente Beschreibung der Stetigkeit)

Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ metrische

Räume, $f: X \rightarrow Y$ und $a \in X$.

Dann sind äquivalent:

(i) φ stetig (genauer (d_1, d_2) -stetig)
in a

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit

$$\varphi(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(\varphi(a))$$

$$(B_\delta(a) := \{x \in X : \underline{d_1}(x, a) < \delta\},$$

$$B_\varepsilon(\varphi(a)) := \{y \in Y : \underline{d_2}(y, \varphi(a)) < \varepsilon\})$$

(iii) Zu jeder Umgebung V von $\varphi(a)$
in Y existiert eine Umgebung U
von a in X mit $\varphi(U) \subset V$.

Beweis: vgl. Satz 9.2 und die Lektion
Bemerkungen im Umfeld. ↑ 13